

成都 2017 届第三次高考模拟

理科数学

第 I 卷

一、选择题：本大题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 在一次抛硬币实验中，甲、乙两人各抛一次硬币一次，设命题 p 是“甲抛的硬币正面向上”， q 是“乙抛的硬币正面向上”，则命题“至少有一人抛的硬币是正面向下”可表示为 ()

- A. $(\neg p) \vee (\neg q)$ B. $p \vee (\neg q)$ C. $(\neg p) \wedge (\neg q)$ D. $(\neg p) \vee q$

2. 已知集合 $A = \{x \mid |x-1| < 1\}$, $B = \{x \mid x^2 - 1 < 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $(-1, 1)$ B. $(-1, 2)$ C. $(1, 2)$ D. $(0, 1)$

3. 若 $\frac{1+ai}{2+i} = 1+2i$, 则 $a =$ ()

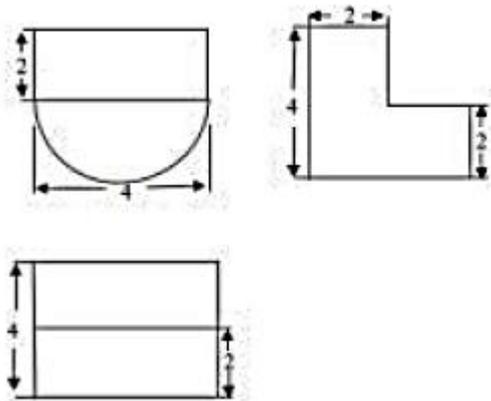
- A. $-5-i$ B. $-5+i$ C. $5-i$ D. $5+i$

4. 设 $f(x)$ 是定义在 R 上周期为 2 的奇函数，当 $0 \leq x \leq 1$ 时， $f(x) = x^2 - x$, 则 $f\left(-\frac{5}{2}\right) =$

()

- A. $-\frac{1}{4}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

5. 某几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积为 ()

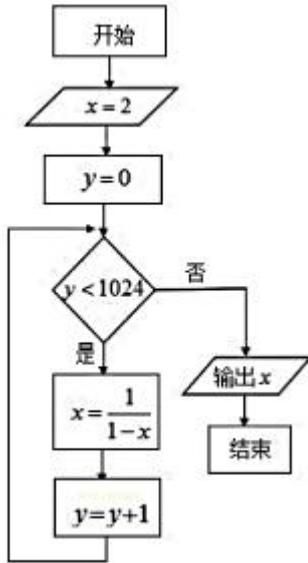


- A. $36+12\pi$ B. $36+16\pi$ C. $40+12\pi$ D. $40+16\pi$

6. 设 D 为 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的中点，且 O 为 AD 边上靠近点 A 的三等分点，则 ()

- A. $\vec{BO} = -\frac{5}{6}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{AC}$ B. $\vec{BO} = \frac{1}{6}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC}$
 C. $\vec{BO} = \frac{5}{6}\vec{AB} - \frac{1}{6}\vec{AC}$ D. $\vec{BO} = -\frac{1}{6}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$

7. 执行如图的程序框图，则输出 x 的值是 ()



- A. 2016 B. 1024 C. $\frac{1}{2}$ D. 1

8. 已知 $P(x_0, y_0)$ 是椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上的一点, F_1, F_2 是 C 的两个焦点, 若 $\vec{PF}_1 \cdot \vec{PF}_2 < 0$, 则 x_0 的取值范围是 ()

- A. $\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$ B. $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ C. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
 D. $\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

9. 等差数列 $\{a_n\}$ 中的 a_2, a_{4032} 是函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 6x - 1$ 的两个极值点, 则

$\log_2(a_2 \cdot a_{2017} \cdot a_{4032}) = ()$

- A. $4 + \log_2^6$ B. 4 C. $3 + \log_2^3$ D. $4 + \log_2^3$

10. 函数 $f(x) = \sin x \cdot (4 \cos^2 x - 1)$ 的最小正周期是 ()

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{2\pi}{3}$ C. π D. 2π

11. 某医务人员说：“包括我在内，我们社区诊所医生和护士共有 17 名。无论是否把我算在内，下面说法都是对的。在这些医务人员中：医生不少于护士；女护士多于男医生；男医生比女医生多；至少有两男护士。”请你推断说话的人的性别与职业是（ ）

- A. 男医生 B. 男护士 C. 女医生 D. 女护士

12. 设集合 $A = \left\{ (x, y) \mid (x-3)^2 + (y-4)^2 = \frac{4}{5} \right\}$, $B = \left\{ (x, y) \mid (x-3)^2 + (y-4)^2 = \frac{36}{5} \right\}$,

$C = \left\{ (x, y) \mid 2|x-3| + |y-4| = \lambda \right\}$, 若 $(A \cup B) \cap C \neq \emptyset$, 则实数 λ 的取值范围是（ ）

- A. $\left[\frac{2\sqrt{5}}{5}, 2 \right] \cup \left[\frac{6\sqrt{5}}{5}, 6 \right]$ B. $[2, 6]$ C. $\left[\frac{2\sqrt{5}}{5}, 2 \right] \cup [4, 6]$

- D. $\left[\frac{4\sqrt{5}}{5}, 2 \right] \cup \left[\frac{6\sqrt{5}}{5}, 6 \right]$

第 II 卷

二、填空题：本大题共四小题，每小题 5 分

13. 已知向量 $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = \sqrt{2}$, 且 $\vec{b} \cdot (2\vec{a} + \vec{b}) = 1$, 则向量 \vec{a}, \vec{b} 的夹角的余弦值为_____.

14. 二项式 $(x+y)^5$ 的展开式中, 含 x^2y^3 的项的系数是 a , 若 m, n 满足 $\begin{cases} 10m - 10n \geq a \\ m + n \leq 4 \\ n \geq 0 \end{cases}$, 则

$u = m - 2n$ 的取值范围是_____.

15. 成都七中 112 岁生日当天在操场开展学生社团活动选课超市, 5 名远端学生从全部六十多个社团中根据爱好初选了 3 个不同社团准备参加. 若要求这 5 个远端学生每人选一个社团, 而且这 3 个社团每个社团都有远端学生参加, 则不同的选择方案有_____种. (用数字作答)

16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} - 1, & x > 1 \\ 2 - e^x, & x \leq 1 \end{cases}$, 若函数 $h(x) = f(x) - mx - 2$ 有且仅有一个零点, 则

实数 m 的取值范围是_____.

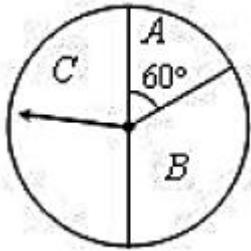
三、解答题 (共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对应的边分别为 a, b, c , 已知 $B = \frac{\pi}{4}$, $\cos A - \cos 2A = 0$.

(1) 求角 C ;

(2) 若 $b^2 + c^2 = a - bc + 2$ ，求 $S_{\triangle ABC}$ 。

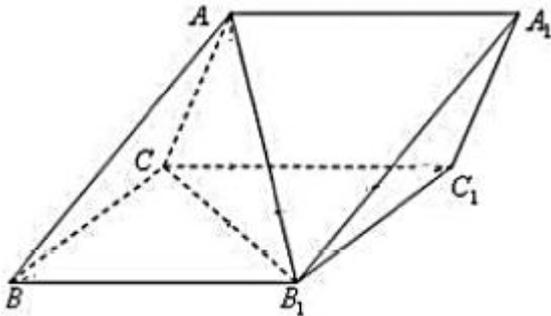
18. 某商场为吸引顾客消费推出一项优惠活动. 活动规则如下: 消费额每满 100 元可转动如图所示的转盘一次 (指针停在任一位置的可能性相等), 并获得相应金额的返券. 若指针停在 A 区域返券 60 元; 停在 B 区域返券 30 元; 停在 C 区域不返券. 例如: 消费 218 元, 可转动转盘 2 次, 所获得的返券金额是两次金额之和.



(1) 若某位顾客消费 128 元, 求返券金额不低于 30 元的概率;

(2) 若某位顾客恰好消费 280 元, 并按规则参与了活动, 他获得返券的金额记为 X (元). 求随机变量 X 的分布列和数学期望.

19. 如图三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 侧面 BB_1C_1C 为菱形, $AB \perp B_1C$.



(1) 证明: $AC = AB_1$;

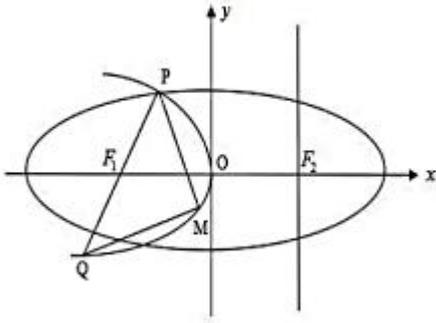
(2) 若 $AC \perp AB_1$, $\angle CBB_1 = 60^\circ$, $AB = BC$, 求二面角 $A - A_1B_1 - C_1$ 的余弦值.

20. 如图, 设抛物线 $C_1: y^2 = -4mx (m > 0)$ 的准线 l 与 x 轴交于椭圆

$C_2: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点 F_2 , F_1 为 C_2 的左焦点. 椭圆的离心率为 $e = \frac{1}{2}$, 抛物线

C_1 与椭圆 C_2 交于 x 轴上方一点 P , 连接 PF_1 并延长其交 C_1 于点 Q , M 为 C_1 上一动点,

且在 P, Q 之间移动.



(1) 当 $\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{b}$ 取最小值时，求 C_1 和 C_2 的方程；

(2) 若 $\triangle PF_1F_2$ 的边长恰好是三个连续的自然数，当 $\triangle MPQ$ 面积取最大值时，求面积最大值以及此时直线 MP 的方程。

21. 已知函数 $f(x) = x - a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) .

(1) 当 $a = e$, x 取一切非负实数时，若 $f(x) \leq b - \frac{1}{2}x^2$, 求 b 的范围；

(2) 若函数 $f(x)$ 存在极大值 $g(a)$, 求 $g(a)$ 的最小值.

请考生在 22、23 两题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分。

22. 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在极坐标系下，知圆 $O: \rho = \cos \theta + \sin \theta$ 和直线

$$l: \rho \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi).$$

(1) 求圆 O 与直线 l 的直角坐标方程；

(2) 当 $\theta \in (0, \pi)$ 时，求圆 O 和直线 l 的公共点的极坐标。

23. 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |2x+3| + |2x-1|$.

(1) 求不等式 $f(x) \leq 5$ 的解集；

(2) 若关于 x 的不等式 $f(x) < |m-1|$ 的解集非空，求实数 m 的取值范围。

试卷答案

一、选择题

1-5: ABDCC 6-10: ADACB 11、12: CA

二、填空题

13. $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ 14. $\left[-\frac{1}{2}, 4\right]$ 15. 150 种 16.

$$m \in (-\infty, -e] \cup \{0\} \cup \{4\sqrt{2} - 6\}$$

三、解答题

17. 解: (1) 因为 $\cos A - \cos 2A = 0$, 所以 $2\cos^2 A - \cos A - 1 = 0$, 解得 $\cos A = -\frac{1}{2}$,

$\cos A = 1$ (舍去).

所以 $A = \frac{2}{3}\pi$, 又 $B = \frac{\pi}{4}$, 所以 $C = \frac{\pi}{12}$.

(2) 因为 $A = \frac{2}{3}\pi$, 所以 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 + bc$, 又 $b^2 + c^2 = a - bc + 2$,

所以 $a^2 = a + 2$, 所以 $a = 2$,

又因为 $\sin C = \sin \frac{\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, 由 $\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$ 得 $c = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{3}$, 所

$$\text{以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \cdot \sin B = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

18. 解: 设指针落在 A 、 B 、 C 区域分别记为事件 A 、 B 、 C . 则

$$P(A) = \frac{1}{6}, P(B) = \frac{1}{3}, P(C) = \frac{1}{2}.$$

(1) 消费 128 元的顾客, 只能转一次, 若返券金额不低于 30 元, 则指针落在 A 或 B 区域, 其概率 $P = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$, 即消费 128 元的顾客返券金额不低于 30 元的概率

是 $\frac{1}{2}$.

(2) 该顾客可转动转盘 2 次. 随机变量 X 的可能值为 0, 30, 60, 90, 120.

$$P(X=0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}; \quad P(X=30) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 2 = \frac{1}{3};$$

$$P(X=60) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \times 2 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{18};$$

$P(X=90) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{9}$; $P(X=120) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$; 所以，随机变量 X 的分布列为：

P	0	30	60	90	120
X	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$

其数学期望 $EX = 0 \times \frac{1}{4} + 30 \times \frac{1}{3} + 60 \times \frac{5}{18} + 90 \times \frac{1}{9} + 120 \times \frac{1}{36} = 40$.

19. 解：(1) 连接 BC_1 ，交 B_1C 于点 O ，连接 AO ，因为侧面 BB_1C_1C 为菱形，所以 $B_1C \perp BC_1$ ，且 O 为 B_1C 及 BC_1 的中点，又 $AB \perp B_1C$ ，所以 $B_1C \perp$ 平面 ABO 。由于 $AO \subset$ 平面 ABO ，故 $B_1C \perp AO$ 。

又 $B_1O = CO$ ，故 $AC = AB_1$ 。

(2) 因为 $AC \perp AB_1$ ，且 O 为 B_1C 的中点，所以 $AO = CO$ 。

又因为 $AB = BC$ ，所以 $\triangle BOA \cong \triangle BOC$ ，故 $OA \perp OB$ ，从而 OA, OB, OB_1 两两相互垂直， O 为坐标原点， \overrightarrow{OB} 的方向为 x 轴正方向， $|\overrightarrow{OB}|$ 为单位长，建立空间直角坐标系 $O-xyz$ (图略)

因为 $\angle CBB_1 = 60^\circ$ ，所以 $\triangle CBB_1$ 为等边三角形，又 $AB = BC$ ，则 $A\left(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), B(1, 0, 0)$ ，

$B_1\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right), C\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ 。 $\overrightarrow{AB_1} = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB} = \left(1, 0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ，

$\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{BC} = \left(-1, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ ，设 $\vec{n} = (x, y, z)$ 是平面 AA_1B_1 的法向量，则

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB_1} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1B_1} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{3}y - \frac{\sqrt{3}}{3}z = 0 \\ x - \frac{\sqrt{3}}{3}z = 0 \end{cases}, \text{ 设 } \vec{m} \text{ 是平面 } A_1B_1C_1 \text{ 的法向量，则 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{A_1B_1} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{B_1C_1} = 0 \end{cases}, \text{ 同}$$

理可取 $\vec{m} = (1, -\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 。

所以可取 $\vec{n} = (1, \sqrt{3}, \sqrt{3})$ ， $\cos \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \vec{m}}{|\vec{n}| |\vec{m}|} = \frac{1}{7}$ ，

所以二面角 $A-A_1B_1-C_1$ 的余弦值为 $\frac{1}{7}$.

20. 解: (1) 因为 $c = m, e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, 则 $a = 2m, b = \sqrt{3}m$, 所以 $\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{b}$ 取最小值时 $m = 1$,

此时抛物线 $C_1: y^2 = -4x$, 此时 $a = 2, b^2 = 3$, 所以椭圆 C_2 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$;

(2) 因为 $c = m, e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, 则 $a = 2m, b = \sqrt{3}m$, 设椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4m^2} + \frac{y^2}{3m^2} = 1$,

$$P(x_0, y_0), Q(x_1, y_1) \text{ 由 } \begin{cases} \frac{x^2}{4m^2} + \frac{y^2}{3m^2} = 1 \\ y^2 = -4mx \end{cases} \text{ 得 } 3x^2 - 16mx - 12m^2 = 0, \text{ 所以 } x_0 = -\frac{2}{3}m \text{ 或}$$

$x_0 = 6m$ (舍去),

带入抛物线方程得 $y_0 = \frac{2\sqrt{6}}{3}m$, 即 $P\left(-\frac{2m}{3}, \frac{2\sqrt{6}m}{3}\right)$

于是 $|PF_1| = \frac{5m}{3}, |PF_2| = 2a - |PF_1| = \frac{7m}{3}, |PF_2| = 2m = \frac{6m}{3}$, 又 $\triangle PF_1F_2$ 的边长恰好是三个连续的自然数, 所以 $m = 3$. 此时抛物线方程为 $y^2 = -12x$, $F_1(-3, 0), P(-2, 2\sqrt{6})$, 则直线 PQ 的方程为 $y = 2\sqrt{6}(x+3)$.

联立 $\begin{cases} y = 2\sqrt{6}(x+3) \\ y^2 = -12x \end{cases}$, 得 $x_1 = -\frac{9}{2}$ 或 $x_1 = -2$ (舍去), 于是 $Q\left(-\frac{9}{2}, -3\sqrt{6}\right)$. 所以

$$|PQ| = \sqrt{\left(-2 + \frac{9}{2}\right)^2 + (2\sqrt{6} + 3\sqrt{6})^2} = \frac{25}{2},$$

设 $M\left(-\frac{t^2}{12}, t\right) (t \in (-3\sqrt{6}, 2\sqrt{6}))$ 到直线 PQ 的距离为 d , 则 $d = \frac{\sqrt{6}}{30} \times \left| \left(t + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 - \frac{75}{2} \right|$,

当 $t = -\frac{\sqrt{6}}{2}$ 时, $d_{\max} = \frac{\sqrt{6}}{30} \times \frac{75}{2} = \frac{5\sqrt{6}}{4}$, 所以 $\triangle MPQ$ 的面积最大值为

$$\frac{1}{2} \times \frac{25}{2} \times \frac{5\sqrt{6}}{4} = \frac{125\sqrt{6}}{16}. \text{ 此时 } MP: y = -\frac{4}{3}\sqrt{6}x + \frac{2}{3}\sqrt{6}.$$

21. 解: (1) 当 $a = e$ 时, $f(x) = x - e^x$, 原题分离参数得 $b \geq \frac{1}{2}x^2 + x - e^x$ 恒成立, 右边求导分析即可, 问题背景实际是泰勒展开的前三项. 答案: $b \geq 1$

$$(2) f'(x) = 1 - a^x \ln a,$$

①当 $0 < a < 1$ 时, $a^x > 0, \ln a < 0$, 所以 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上为单增函数, 无极大值;

②当 $a > 1$ 时, 设方程 $f'(x) = 0$ 的根为 t , 则有 $a^t = \frac{1}{\ln a}$, 即 $t = \log_a \frac{1}{\ln a} = \frac{\ln \frac{1}{\ln a}}{\ln a}$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, t)$ 上为增函数, 在 $(t, +\infty)$ 上为减函数, 所以 $f(x)$ 的极大值为

$$f(t) = t - a^t = \frac{\ln \frac{1}{\ln a}}{\ln a} - \frac{1}{\ln a}, \text{ 即 } g(a) = \frac{\ln \frac{1}{\ln a}}{\ln a} - \frac{1}{\ln a}, \text{ 因为 } a > 1, \text{ 所以 } \frac{1}{\ln a} > 0, \text{ 令}$$

$$x = \frac{1}{\ln a} \text{ 则 } \frac{\ln \frac{1}{\ln a}}{\ln a} - \frac{1}{\ln a} = x \ln x - x,$$

设 $h(x) = x \ln x - x, x > 0$, 则 $h'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x$. 令 $h'(x) = 0$, 得 $x = 1$, 所以

$h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上为减函数, 在 $(1, +\infty)$ 上为增函数, 所以 $h(x)$ 得最小值为 $h(1) = -1$, 即

$g(a)$ 的最小值为 -1 , 此时 $a = e$.

22. 解: (1) 圆 $O: \rho = \cos \theta + \sin \theta$, 即 $\rho^2 = \rho \cos \theta + \rho \sin \theta$, 故圆 O 的直角坐标方程为:

$$x^2 + y^2 - x - y = 0, \text{ 直线 } l: \rho \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 即 } \rho \sin \theta - \rho \cos \theta = 1, \text{ 则直线的直角}$$

坐标方程为: $x - y + 1 = 0$.

$$(2) \text{ 由 (1) 知圆 } O \text{ 与直线 } l \text{ 的直角坐标方程, 将两方程联立得 } \begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \text{ 解得}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}. \text{ 即圆 } O \text{ 与直线 } l \text{ 的在直角坐标系下的公共点为 } (0, 1), \text{ 转化为极坐标为 } \left(1, \frac{\pi}{2} \right).$$

23. 解: (1) 原不等式为: $|2x + 3| + |2x - 1| \leq 5$,

当 $x \leq -\frac{3}{2}$ 时, 原不等式可转化为 $-4x - 2 \leq 5$, 即 $-\frac{7}{4} \leq x \leq -\frac{3}{2}$;

当 $-\frac{3}{2} < x < \frac{1}{2}$ 时, 原不等式可转化为 $4 \leq 5$ 恒成立, 所以 $-\frac{3}{2} < x < \frac{1}{2}$;

当 $x \geq \frac{1}{2}$ 时, 原不等式可转化为 $4x + 2 \leq 5$, 即 $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}$.

所以原不等式的解集为 $\left\{x \mid -\frac{7}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}\right\}$.

(2) 由已知函数 $f(x) = \begin{cases} -4x-2, & x \leq -\frac{3}{2} \\ 4, & -\frac{3}{2} < x < \frac{1}{2} \\ 4x+2, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$, 可得函数 $y = f(x)$ 的最小值为 4,

所以 $|m-2| > 4$, 解得 $m > 6$ 或 $m < -2$.

